$\Rightarrow$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

* f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

*et* $f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}} \neq 0$

*d'où* g est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$

*conclusion* : g est dérivable sur $J=[0,+\infty[$

*pour* $x \in ]0,+\infty[$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

soit $y=g(x)$, $f(y)=x$; $\sqrt{1+tgy}=x, tgy=x^2-1$

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{1+tgy}}{1+tg^2y}=\frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+(x^2-1)^2}=\frac{2|x|}{x^4-2x^2+2}$$

$$g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2} \quad car\ x>0$$

* $g'_d(0)=0=\frac{2\times 0}{0^4-2\times 0^2+2}$

*d'où* $g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$ ; $\forall x \in \mathbb{R}_+$

4) $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k)$ ; $(n \in \mathbb{N})$

a) f est strictement croissane sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

*d'où* g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$n \le k \le 2n \Rightarrow g(n) \le g(k) \le g(2n)$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{2n} g(n) \le \sum_{k=n}^{2n} g(k) \le \sum_{k=n}^{2n} g(2n)$$

$$\Rightarrow (n+1).g(n) \le (n+1).U_n \le (n+1).g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n) \le U_n \le g(2n)$$

b) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g(n)=\lim_{n\to+\infty}(2n)=\frac{\pi}{2}$$

*d'où* $\lim_{x\to+\infty} U_n=\frac{\pi}{2}$

**partie B :**

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0\end{cases}$$

1) a) * h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

comme étant composée de 2 fonctions continues

* continuité en 0: $\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{\pi}{2}$

*d'où* $\lim_{x\to0^+} h(x)=\frac{\pi}{4}=h(0)$

h est continue à droite en 0

conclusion : h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) la fonction : $x \mapsto 1+\frac{1}{x}$ est dérivable

et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

*d'où* la fonction U: $x \mapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$U(\mathbb{R}_+^*)=]1,+\infty[$

comme g est dérivable sur $]1,+\infty[$

alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)'.g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right].g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^4-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2+2}=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

*d'où* $h'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$

2) a) $x>0$

h est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ .

d'a^prés le théorème des accroissements finis il existe $c \in ]0,x[$

tq : $h(x)-h(0)=(x-0)h'(c) \Leftrightarrow h(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2(1+c^2)}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn